

Estabilización transitoria de estados inestables con procesos de lévy

Esther D. Gutiérrez M.

Juan L. Cabrera F.

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Laboratorio de Dinámica Estocástica

sterguti@gmail.com

Fecha de recepción: 22 - 05 - 2016 Fecha de aceptación: 15- 06- 2016

Resumen

Algunos sistemas dinámicos operan en un punto crítico entre la estabilidad y la inestabilidad requiriendo un fino ajuste de parámetros. Además, los fenómenos de fluctuaciones anómalas podrían estar asociados a la prolongación de los tiempos de vida de los estados inestables transitoriamente estabiliza-

dos. Este trabajo está enfocado en conocer e identificar los efectos introducidos por procesos de Lévy con diversas propiedades, particularmente superdifusivas y truncadas. Numéricamente se analiza el efecto de perturbaciones aleatorias paramétricas sobre un sistema inestable arquetipo y se encuentra que las fluctuaciones extremas con distribuciones de probabilidad de Lévy

truncada posponen el decaimiento de los estados inestables. Un análisis del proceso de escape basado en la teoría de grandes fluctuaciones provee una forma alternativa para caracterizar la respuesta del sistema bajo perturbaciones.

Palabras clave: Estabilización; estados inestables ; procesos de Lévy

Transitory stabilization of unstable states with Lévy processes

Abstract

Some dynamic systems operate at a critical point between stability and instability requiring fine tuning of parameters. In addition, abnormal fluctuation phenomena could be associated with the prolongation of the life times of transiently stabilized unstable states.

This work is focused on knowing and identifying the effects introduced by Lévy processes with diverse properties, particularly superdiffusive and truncated. Numerically, the effect of parametric random perturbations on an unstable archetype system is analyzed and it is found that extreme fluctuations with truncated Lévy probability distributions

postpone the decay of unstable states. An analysis of the escape process based on the theory of large fluctuations provides an alternative way to characterize the response of the system under disturbances.

Key words: Stabilization; unstable states; Lévy processes

Introducción

El estudio de las fluctuaciones es útil para el entendimiento de los mecanismos implícitos en los procesos de control de un sistema dinámico inestable. El modelo propuesto por (Cabrera & Milton, 2002), Una generalización del péndulo invertido capaz de incorporar el efecto de retardos temporales en el proceso de control ha sido utilizado para describir la dinámica del balance humano de objetos inestables. Desde un punto de vista matemático se trata de una ecuación funcional estocástica con ruido multiplicativo o paramétrico acotado. La perturbación estocástica afecta directamente un importante parámetro de control.

Los estudios de (Cabrera & Milton, 2004) indican que la influencia del ruido blanco, i.e., aleatoriedad estocástica sin autocorrelaciones presentes, es capaz de estabilizar transitoriamente cerca de una frontera crítica la dinámica

inestable del objeto. Se descubrió que el movimiento controlador sigue un proceso con características superdifusivas, está caracterizado por una distribución de Lévy con índice ≈ 0.9 , en coincidencia con resultados previos que señalan a este valor como optimal en el proceso de búsqueda y exploración del espacio (Humpries, et al., 2010; Viswanathan, et al, 2008; Brockmann, et al., 2006).

Este hecho no ha recibido la debida atención. Parece ser relevante estudiar cómo las perturbaciones extremas dadas por distribuciones de probabilidad del tipo Lévy-Khintchine pueden afectar la dinámica inestable y particularmente aquella descrita por una tarea de control humano.

Péndulo invertido con retardo temporal

El péndulo invertido con retardo temporal y perturbaciones aleatorias y la tarea humana de equilibrar una vara en

la punta del dedo han sido considerados arquetipos en el estudio de la dinámica inestable presente en campos tan diversos como la robótica (Suzuki & Furuta, 2010), los estudios de las fluctuaciones financieras (Bouchaud, et al., 2004) o el control de misiles (Stoica & Yaesh, 2008).

La ecuación dinámica del péndulo invertido que incorpora los efectos de las perturbaciones estocásticas y retroalimentación temporal se puede modelar considerando un péndulo de masa m y momento de inercia $I = 1/3 ml^2$ que se mueve bajo la acción de: su peso, la fricción (que depende del parámetro γ) y una fuerza de restauración que depende de la desviación angular del péndulo respecto a la vertical en un tiempo previo ($t - \tau$), (Figura 1).

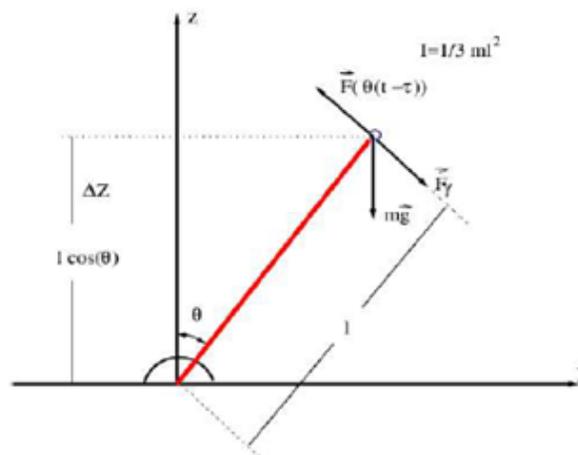


Figura 1. Sistema de péndulo invertido de masa m y longitud l . El ángulo de desviación respecto a la vertical viene dado por θ . mg es la fuerza que ejerce la gravedad, F_γ es la fuerza de amortiguamiento (o de fricción), $F(\theta(t-\tau))$ es la fuerza de restauración. τ es el tiempo de retardo de la fuerza restauradora.

El movimiento angular del péndulo alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, según la ecuación (1):

$$\text{Sum}(N) = I \ddot{\theta}, (1)$$

Donde N es el torque que actúa sobre el péndulo y el ángulo de desviación respecto a la vertical viene dado por θ . De acuerdo a la ecuación (2):

$$N_{\text{friccion}} + N_{\text{gravedad}} + N_{\text{F restauradora}} = I \ddot{\theta} (2)$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden, ecuación (3):

$$I \ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} - mgl \sin(\theta) + cF(\theta(t - \tau)) = 0, (3)$$

Donde c es una constante. El signo “-” se debe a que se ha tomado $\theta = 0$ como la posición vertical. En ausencia de la fuerza restauradora el punto fijo es inestable.

A través del siguiente cambio de variables normalizamos el retardo temporal:

$$t - \tau \rightarrow t' - I > t = t' \tau \text{ y } dt = \tau dt'$$

Entonces, la ecuación (4):

$$\theta'' + \Gamma \theta' - q \sin(\theta) + CF(\theta(t-1)) = 0, (4)$$

Donde $\Gamma \equiv 3\gamma/m$, $q \equiv 3g/l \tau^2$ y $C \equiv (3/ml) \tau^2$

Si ahora se realiza la expansión en serie de Taylor, se obtiene la ecuación (5):

$$CF(\theta-1) - R_0\theta(t-1) + R_1\theta'(t-1) + \dots, (5)$$

Y se toma en consideración únicamente el término lineal de la fuerza de restauración, se tiene la ecuación (6):

$$CF(\theta-1) - R_0\theta(t-1). (6)$$

La ecuación de movimiento para la desviación angular del péndulo respecto a la vertical (4) toma la forma que se describe en la ecuación (7):

$$\theta'' + \Gamma \theta' - q \sin(\theta) + R_0\theta(t-1) = 0. (7)$$

Debido al movimiento de la mano la fuerza $F(\theta(t-1))$ cambia no sólo el ángulo sino la posición del punto de

suspensión. Esto se puede modelar introduciendo una fuerza aleatoria en el parámetro de la fuerza restauradora tal que: $R(t) \equiv R_0 + \zeta(t)$, donde R_0 es un parámetro ajustable y $\zeta(t)$ se considera una función aleatoria que puede ser:

- a) Ruido Gaussiano blanco con media cero [6], es decir, un proceso de intensidad D y función de correlación $\langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$, b) Ruido Lévy distribuido.

Finalmente, bajo las consideraciones anteriores, la ecuación (7) se transforma en la ecuación (8):

$$\theta'' + \Gamma \theta' - q \sin(\theta) + (R_0 + \zeta(t))\theta(t-1) = 0. (8)$$

Cuando el sistema dinámico es integrado en ausencia de ruido, $\zeta(t) = 0$, existe una región de estabilidad, para el conjunto de parámetros (R_0, τ) donde $\theta < \pi/2$ cuando $t \rightarrow \infty$, entre una línea recta y una parábola, tal como se describe en la (Figura 2).

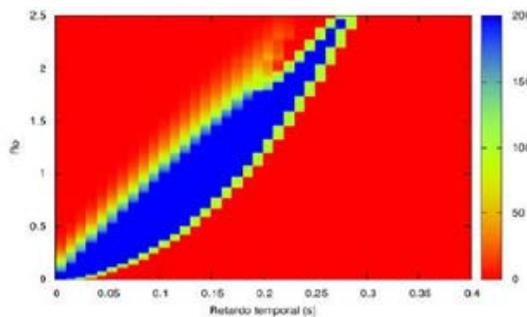


Figura 2. Dominio de estabilidad para el sistema dinámico (8) en el caso determinista en el plano (R_0, τ) . Este sistema dinámico es integrado utilizando el método de Euler con paso de integración $h=0.001$. Se considera que el sistema escapa siempre que $\theta > \pi/2$ para $t/h > 200.000.000$ (la región en la cual la intensidad es nula); de otra manera, el par (R_0, τ) pertenece al dominio de estabilidad. Se espera que el dominio de estabilidad se aproxime al real cuando $t \rightarrow \infty$.

El objetivo fundamental de este estudio es considerar si las perturbaciones extremas podrían prolongar la vida de estados inestables estabilizados transitoriamente. Estudios anteriores (Cabrera & Milton, 2002) han demostrado que ruido blanco puede estabilizar transitoriamente la dinámica inestable, por lo tanto, parece pertinente considerar si un ruido Lévy distribuido puede ajustarse

con el fin de optimizar el rendimiento.

Se considera entonces, el modelo del péndulo invertido bajo dos perturbaciones aleatorias paramétricas con funciones de densidad de probabilidad diferente, pero reescaladas apropiadamente: ruido blanco distribuido con desviación estándar $\sigma = 0.5$ y ruido de cola pesada distribuido según una distribución de

probabilidad del tipo Lévy- Khintchine con índice característico $\alpha = 0.9$ (Lévy, 1925) y truncada a $T = 3\sigma$ (Mantegna & Stanley, 1994).

Ambas distribuciones son comparadas en la Figura 3. Para hacer estas dos distribuciones comparables hacemos la distribución de Lévy converger al caso gaussiano para $\alpha = 2$.

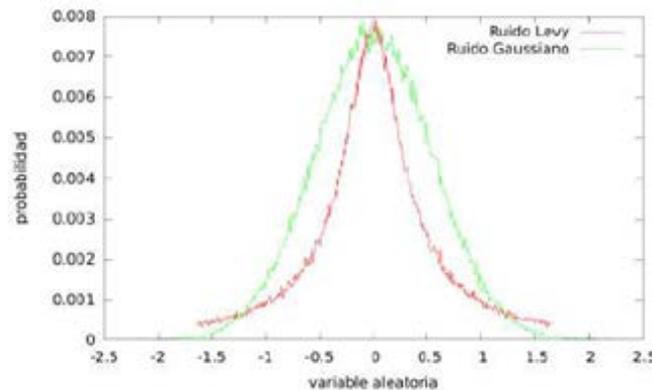


Figura 3. Distribuciones de probabilidad: Lévy-Khintchine con índice $\alpha = 0,9$ (Weron, 1996) truncamiento $T = 1,5$ y Gaussiano (Fox, 1978) con desviación estándar $\sigma = 0,5$. Si tenemos la distribución de probabilidad de Lévy Khintchine $\alpha = 2$, entonces la distribución Gaussiana con $\sigma = \text{sqrt}(2)\sigma_{levy}$, donde σ_{levy} es un parámetro de escala.

Resultados

El sistema dinámico estocástico tanto para ruido Gaussiano como para ruido tipo Lévy crea estabilidad transitoria. Cuando el ruido se añade a un valor de R_0 cerca de la frontera de estabilidad, tomando valores de R_0 y τ dentro de la región en forma de media luna, las so-

luciones estocásticas resultan en el péndulo invertido estabilizado.

En la Figura 4 se muestra la superficie de tiempos de escape (se considera que el sistema escapa siempre que $\theta > \pi/2$) en los casos en que la perturbación es determinista y estocástica: ruido gaussiano con desviación estándar $\sigma=0.55$ y

ruido del tipo Lévy con índice $\alpha = 0.9$ y truncado en tres veces la desviación estándar gaussiana ($T = 3\sigma$). Como se observa, todas las superficies de tiempo de escape estocásticas son cualitativamente similares entre sí. Sin embargo, en el caso de Lévy se observa un incremento ligero en los tiempos de escape y del dominio de la estabilidad del sistema.

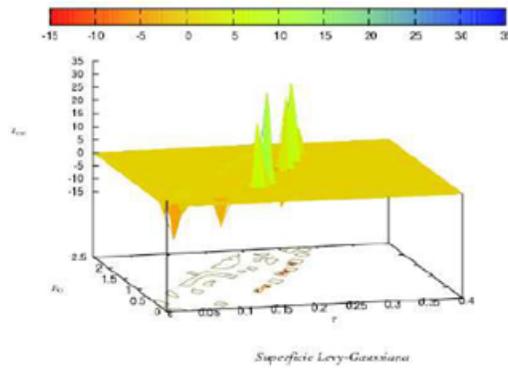


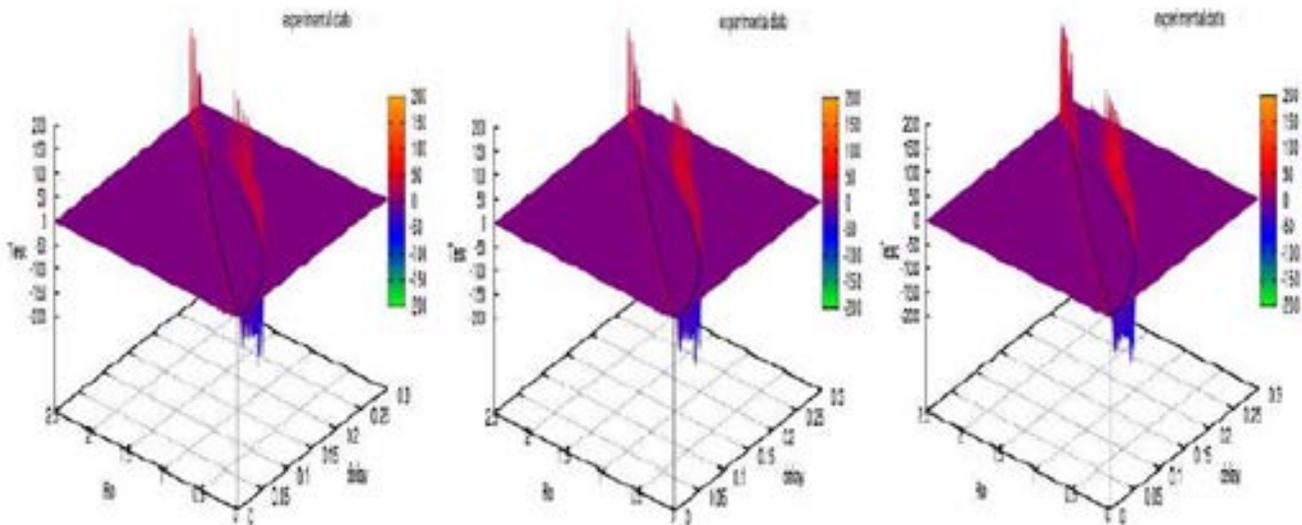
Figura 4. Arriba: Superficies de tiempo de escape para las condiciones estocásticas y determinista, calculadas como sigue: Para cada par (R_0, τ) la ecuación es integrada usando el algoritmo de Euler con tamaño de paso $h=0.0001$. La segunda fila muestra la resta de dos superficies de escape. La dinámica obtenida debido a ruido de tipo Lévy en comparación con la dinámica obtenida debido a fluctuaciones Gaussianas para el péndulo invertido muestra que para fluctuaciones extremas se obtiene un incremento en los tiempos de escape del estado transitoriamente estabilizado y del dominio de estabilidad. Abajo: acercamiento de la gráfica mas representativa. Los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones $\gamma = 100, m = 35.0 \text{ gr}, l = 0.621 \text{ mts}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

En la Figura 5 se muestra la dependencia de las superficies de tiempo de escape de la dinámica obtenida debido a ruido de tipo Lévy en comparación con la dinámica obtenida debido a fluctuaciones Gaussianas respecto al parámetro σ y se obtiene que el efecto estabili-

zador en la frontera es robusto.

Figura 5. Se muestra el dominio de estabilidad para el conjunto de parámetros (R_0, τ) experimental (Cabrera & Milton, 2004) en conjunto con la resta de dos superficies de escape: La diná-

mica obtenida debido a ruido de tipo Lévy en comparación con la dinámica obtenida debido a fluctuaciones Gaussianas para el péndulo invertido. De izquierda a derecha: para los parámetros $\sigma=0.52, \sigma=0.6, \sigma=0.8$.



Conclusiones

Las simulaciones sugieren que en comparación con la dinámica obtenida debido a fluctuaciones Gaussianas para el péndulo invertido, las fluctuaciones extremas dan lugar a un incremento en los tiempos de escape y del dominio de estabilidad del sistema; implicando que la estadística extrema ha sido seleccionada como estrategia para aumentar el tiempo de equilibrio en el contexto del control motor. Estos resultados pueden ser la clave para explicar por qué en el problema del equilibrio de la vara en la punta del dedo los movimientos de la mano son Lévy distribuidos (Cabrera & Milton, 2004) en lugar de poseer distribuciones Gaussianas.

Referencias Bibliográficas

- Barthelemy, P., Bertolotti, J., Wiersma, D.S. (2008). *A Lévy flight for light*. Nature, 453, 495-498.
- Bouchaud, G. (1990). *Anomalous Diffusion in Disordered Media*. Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications, Phys Rep 195, 127.
- Bouchaud, J.P., Gefen, Y., Potters, M., Wyart, M. (2004). *Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of "random" price changes*. Quantitative Finance 4, 176 .
- Brockmann, D., Geisel, T. (2003). *Lévy Flights in Inhomogeneous Media*. Physical Review Letters. 90, 17.
- Brockmann, D., Hufnagel, L., Geisel T. (2006). *The scaling laws of human travel*. Nature 439. 462-465.
- Cabrera, J.L., Milton, J. (2002). *On-Off Intermittency in a Human Balancing Task*. Physical Review Letters 89, 158702-1.
- Cabrera, J.L., Milton J. (2004). *Human stick balancing: Tuning Lévy flights to improve balance control*. Chaos 14, 3.
- Fox, R. (1978). *Gaussian stochastic processes in physics*. Phys. Rep., 48, 3, 179-283.
- Humphries, N. et al. (2010). *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*. Nature, 465.
- Khintchine, A.Ya. Lévy P. (1936). **Sur les lois stables**. C. R. Acad. Sci. Paris, 202.
- Klafter, J., Sokolov, I.M. (2005). *Anomalous Diffusion Spreads Its Wings*. Physics World.
- Koponen, I. (1995). *Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussianstochastic process*, Phys. Rev. E., 52, 1197-1199.
- Lévy, P. (1925). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris.Gauthier-Villars.
- McCulloch, J. H. (1986). Simple consistent estimators of stable distribution parameters, Communications in Statistics-Simulations 15, 1109-1136.
- Mantegna, R.N., Stanley, H.E. (1999). *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.
- Mantegna, R.N., Buldrev, S.V., Goldberger, A.L., Havlin, S., Peng, C.K., Simons, M., Stanley, H.E. (1994). *Linguistic Features of Noncoding DNA Sequences*. Phys. Rev. Lett. 73. 3169-3172.
- Mantegna, R.N., Stanley, H.E. (1994). *Stochastic process with ultra-slow convergence to a Gaussian: the truncated Lévy flight*, Phys. Rev. Lett. 73. 2946- 2949.
- Samorodnitsky, G., Taqqu, M. (1994). *Stable non-gaussian random processes*, Chapman & Hall/Crc.
- Sellis, D., Almirantis, Y. (2009). *Power-laws in the genomic distribution of coding segments in several organisms: A evolutionary trace of segmental duplications, possible paleopolyploidy and gene loss*. Gene. 447, 18.
- Schlesinger, M.F., Zaslavsky, G.M., Klafter, J. (1993). *Strange Kinetics*. Nature. 363, 31-37.
- Sornette, D. (2004). *Critical Phenomena in Natural Sciences, Chaos, Fractals. Self-Organization and Disorder: Concepts and Tools*. Springer Series in Synergetics, Heidelberg. Sotolongo-Costa, O., Antoranz, J.C., Posadas, A., Vidal, F.,

Vázquez, A. (2000) Lévy Flights and Earthquakes. *Geophysical Research Letters*. 27.

Stoica, A-M., Yaesh, I. (2008). Markovian Jump Delayed Hopfield Networks with Multiplicative Noise. *Automatica* 44, 2157-2162.

Suzuki, S.F., Furuta, K. (2010). Human Control Law and Brain Activity of Voluntary Motion by Utilizing a Balancing Task with an Inverted Pendulum, *Advances in Human-Computer Interaction*. 215825.

Viswanathan, G.M., Raposo, E.P., da Luz, M.G.E. (2008). Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches. *Physics of Life Reviews*. 5, 3.

Weron, R. (1996). *On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables*. *Statist. Probab. Lett.* 28, 165-171.