

Aproximación elipsoidal del frente de ondas elástico en medios de simetría monoclinica

Pedro L. Contreras
Andrés Acosta P.
Demián Gutiérrez P.
Universidad de los Andes
pcontreras@ula.ve

Fecha de recepción: 08- 04- 2016 Fecha de aceptación: 12- 06- 2016

Resumen

En este trabajo se introduce una aproximación elipsoidal para las velocidades de fase de los modos longitudinal $-P$, y transversales $-S1$ y $-S2$ en medios que poseen simetría monoclinica. Esta nueva aproximación es válida para ángulos polares pequeños cerca de la dirección vertical, pero sin restricciones en el ángulo acimutal y para grados arbitrarios de anisotropía. A partir de un tratamiento analítico de la ecuación de Christoffel en términos de las lentitudes se logra conseguir expresiones

matemáticas para las velocidades de fase en medios monoclinicos que resultan ser elipsoides 3D rotados respecto a los ejes de simetría. Para establecer el grado de validez de estas expresiones se resuelve numéricamente la ecuación de Christoffel y se visualizan los frentes de onda exactos y aproximados, encontrándose que cerca del eje vertical de simetría dan resultados similares. Aunque los modelos monoclinicos pueden presentarse en formaciones geológicas doblemente fracturadas, han sido poco utilizados en los métodos sísmicos multicomponentes de detección de fractu-

ras debido principalmente a la gran cantidad de parámetros elásticos presentes. Las aproximaciones elipsoidales del frente de ondas pueden ser utilizadas para el cálculo de los tiempos de tránsito, así como el modelaje e inversión de las constantes elásticas en medios doblemente fracturados y para geometrías de adquisición del tipo perfil sísmico vertical y/o multi-acimutal.

Palabras clave: Sísmica multicomponente; medios fracturados; frente de ondas elástico, Simetría Monoclinica.

Ellipsoidal approximation of the elastic wavefront in monoclinic symmetry media

Abstract

In this work, an ellipsoidal approximation is introduced for the phase velocities of the longitudinal -P, and transversal -S1 and -S2 modes in media with monoclinic symmetry. This new approach is valid for small polar angles near the vertical direction, but without restrictions in the azimuth angle and for arbitrary degrees of anisotropy. From an analytical treatment of Christoffel's equation in terms of slowness, it is possible to obtain mathematical expressions

for the phase velocities in monoclinic media that turn out to be 3D ellipsoids rotated with respect to the symmetry axes. To establish the degree of validity of these expressions, the Christoffel equation is solved numerically and the exact and approximate wavefronts are displayed, and it is found that near the vertical axis of symmetry they give similar results. Although monoclinic models can be presented in double fractured geological formations, they have been little used in multicomponent seismic methods for fracture detection

mainly due to the large amount of elastic parameters present. The ellipsoidal approximations of the wavefront can be used for the calculation of transit times, as well as the modeling and inversion of the elastic constants in double fractured environments and for vertical and/or multi-acimutal seismic profile type acquisition geometries.

Key words: Multicomponent Seismic; fractured media; elastic wavefront; monoclinic symmetry

Introducción

Un modelo monoclinico del subsuelo describe un medio fracturado verticalmente en dos direcciones no perpendiculares (ver Figura 1). Esto conlleva a que los yacimientos fracturados sean acimutalmente anisótrpos con respecto a sus propiedades físicas, en particular, con respecto a la propagación de

ondas elásticas (1). La teoría general de la propagación de ondas elásticas en medios monoclinicos es descrita en diferentes monografias (2-3). Sin embargo, el análisis de velocidades sísmicas en este tipo de medios, no ha sido objeto de estudios intensivos. La razón principal es la dependencia tanto polar como acimutal de las velocidades de fase y de grupo, que a su vez conlleva a

la necesidad de formular un modelo en tres dimensiones para una descripción adecuada del mismo. Esto se traduce en la utilización de trece constantes elásticas. El análisis de velocidades sísmicas y la estimación de parámetros elásticos resulta, por tanto, una tarea difícil debido a la gran cantidad de parámetros presentes.

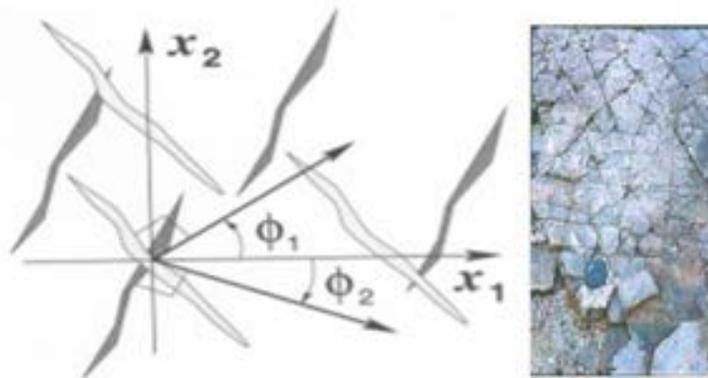


Figura 1. Derecha: Representación esquemática de un medio monoclinico mostrando la orientación de las fracturas en el plano $[x_1, x_2]$. Izquierda: Caliza doblemente fracturada ⁽⁴⁰⁾

Un análisis intensivo de la inversión de parámetros sísmicos para medios monoclinicos en la aproximación de anisotropía débil se desarrolla en (1). Sin embargo dicho análisis funciona para sísmica de superficies donde fuentes y receptores se encuentran localizados en la superficie. Si se desea estimar velocidades y parámetros elásticos para una geometría de adquisición tipo perfil sísmico vertical (VSP) donde los receptores están dentro del pozo, entonces se debe utilizar la aproximación elipsoidal para estimar las velocidades del normal move-out (NMO) correspondientes (4,5). Dicha aproximación estima la anisotropía real del medio en lugar de la anisotropía débil (6), y permite estimar

las velocidades cercanas al eje de simetría de manera precisa. La aproximación elipsoidal en medios de Isotropía Vertical (VTI) es discutida en (4,5,7) y para medios de simetría ortorrómbica se desarrolla en (8).

Este trabajo se dedica a la obtención y visualización de los frentes de las ondas sísmicas cerca al eje vertical de simetría en un medio elástico y monoclinico. En particular se muestra que la aproximación elipsoidal de las velocidades de fase y del NMO es una buena aproximación para ángulos polares menores a veinte grados con respecto al eje vertical de simetría en este tipo de medios fracturados. La data obtenida de la solución

exacta y de la aproximación elipsoidal se comparan mediante un instrumento de visualización en tres dimensiones creado para tal fin y que permite ver los frentes de ondas respectivos.

Velocidades exactas de fase en medios de simetría monoclinica

El tensor que describe las constantes elásticas en un medio de simetría monoclinico con un plano de simetría horizontal $[x_1, x_2]$ y perpendicular al eje- x_3 , puede ser representado en la notación de Voigt de la siguiente forma (1)

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \quad (1)$$

En este trabajo el sistema de referencia se selecciona de manera tal que la constante elástica c_{45} sea nula. De esta forma el tensor de constantes elásticas queda definido en un sistema de coor-

denadas donde los ejes horizontales de propagación x_1 y x_2 resultan paralelos a los vectores de polarización de las ondas de cizalla verticales S_1 y S_2 . Por tanto el tensor elástico se reduce de tre-

ce a doce componentes independientes (1). Dado el tensor de constantes elásticas C_{ij} la ecuación de Christoffel que gobierna la propagación de las ondas elásticas se define como (2)

$$(G_{ik}(\theta_1, \theta_2) - W \delta_{ik}) v_k = 0, \quad (2)$$

Donde $W = \rho V^2$, es el cuadrado de la velocidad de fase V multiplicado por la densidad del medio ρ la cual se considera constante. δ_{ik} Es el delta de Kronec-

ker $G_{ik}(\theta_1, \theta_2)$ Es la matriz de Christoffel en la notación de Voigt y depende del ángulo polar θ_1 , del ángulo acimutal θ_2 . Los autovalores de la ecuación de

Christoffel vienen dados por las raíces del polinomio característico (3)

$$\text{Det}[G_{ik}(\theta_1, \theta_2) - W \delta_{ik}] = 0, \quad (3)$$

De orden cubico en W . Esas raíces representan el cuadrado de las velocidades de fase para cada modo de propagación WP , WS_1 y WS_2 .

Para poder estimar velocidades en medios monoclinicos es necesario, además, expresar la ecuación de Christoffel en términos de las lentitudes (1). Para

ello se define el vector de lentitudes p como el inverso de la velocidad de fase V de acuerdo a la relación.

$$p = (p_1, p_2, p_3) = V^{-1}(\theta_1, \theta_2) n \quad (4)$$

n representa un vector unitario en coordenadas esféricas. En este caso la ecuación de Christoffel toma la forma de una función implícita de tres variables.

$$F = \text{Det}[G_{ik}(\theta_1, \theta_2) - \delta_{ik}] = \text{Det}[C_{ijkl} p_j p_l - \delta_{ik}] = 0. \quad (5)$$

Aproximación elipsoidal en medios de simetría monoclinica

Para comprender el comportamiento de la velocidad de fase alrededor del eje

vertical de simetría, considérese expandir la función F alrededor de un ángulo polar pequeño de acuerdo a las reglas establecidas en el cálculo diferencial de funciones de varias variables (9). De este modo el vector de lentitud vertical

p_3 se considera función de los vectores de

$$\gamma \simeq q^0 + q_i^0 p_i + \frac{1}{2} q_{ij}^0 p_i p_j + \frac{1}{6} q_{ijk}^0 p_i p_j p_k + \frac{1}{24} q_{ijkl}^0 p_i p_j p_k p_l \quad (6)$$

lentitud p_1 y p_2 tal que $p_3 = q(p_1, p_2)$. El desarrollo en series de Taylor que resulta para los cuatro primeros términos de la expansión se escribe de la forma.

La ecuación anterior representa la lentitud vertical en función de las lentitudes horizontales, donde el supra índice 0 indica que esos términos se encuentran evaluados en el eje vertical de simetría. La primera simplificación en la ecuación anterior proviene de consi-

deraciones simétricas, así para permutaciones impares de subíndices en el tensor elástico de cuarto orden las derivadas parciales de primer y tercer orden resultan nulas.

La segunda simplificación consiste en considerar el NMO solamente hiperbólico por cuanto los perfiles sísmicos verticales consideran la fuente localizada cerca de los receptores, lo que permite desprestigiar el último término en (6) que

contiene solo la información del move-out no hiperbólico o dicho de otro modo la información de las velocidades si se consideran distancias lejanas entre la fuente y los receptores.

La ecuación (5) para $p = (0, 0, p_3)$ permite hallar directamente las lentitudes verticales para los tres modos de propagación.

$$\gamma^{P,0} = p_3^P = \frac{1}{\sqrt{c_{33}}}, \quad q^{S1,0} = p_3^{S1} = \frac{1}{\sqrt{c_{55}}} \quad \text{y} \quad q^{S2,0} = p_3^{S2} = \frac{1}{\sqrt{c_{44}}} \quad (7)$$

y por cuanto la onda $S1$ viaja más rápido que la onda $S2$ entonces $q^{S1} > q^{S2}$ se cumple que $C_{55} > C_{44}$. Queda por determinar la magnitud q_{ij} para los

tres modos de propagación, que define el NMO hiperbólico como la segunda derivada de la lentitud vertical con respecto a las lentitudes horizontales,

la ecuación que permite evaluarla en la vertical es (1)

$$q_{ij} = \frac{\partial^2 q}{\partial p_i \partial p_j} = - \frac{F_{p_i, p_j} + F_{p_i, q} q_j + F_{p_j, q} q_i + F_{q, q} q_i q_j}{F_q} \quad (8)$$

Mediante el uso de (7) y (8) y las consideraciones anteriores, a partir de (6) se obtienen las velocidades de fase. Dicho cálculo que, aunque directo es largo, conlleva a las siguientes fórmulas

para la aproximación elipsoidal de las velocidades de fase en medios monoclinicos. Para presentar los resultados de forma coherente se utiliza la relación para el cuadrado de la velocidad de fase

$$W = \rho V^2$$

En primer lugar para el modo de propagación longitudinal se obtiene:

$$W_P(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = W_{P,z} \cos^2 \theta_{1,i} + \sin^2 \theta_{1,i} S_{12} W_{NMO,P} S_{21}^T, (9)$$

Donde el cuadrado de la velocidad vertical $W_{P,z} = C_{33}$; $\theta_{1,i}$ es el ángulo polar, $\theta_{2,i}$ el ángulo acimutal. Además $S = [\sin \theta_{2,i} \cos \theta_{2,i}]$; ST es su traspuesta y $W_{NMO,P}$ viene dada por la matriz cuadrada

$$W_{NMO,P} = \begin{pmatrix} W_{P,11} & W_{P,12} \\ W_{P,12} & W_{P,22} \end{pmatrix} (10)$$

El segundo término en (9) representa el cuadrado de las velocidades horizontales y describe el componente hiperbólico de la velocidad del NMO. El término $S_{12} W_{NMO,P} S_{21}^T$ es una elipse en el reflector horizontal. Cada uno de los términos de la matriz $W_{NMO,P}$ viene dado en función de las constantes elásticas del medio monoclinico de la forma.

$$W_{NMO,11}^P = \frac{(c_{33}-c_{44})(c_{13}^2 + 2 c_{13} c_{55} + c_{33} c_{55}) + c_{36}^2(c_{33}-c_{55})}{(c_{33}-c_{44})(c_{33}-c_{55})}, (11)$$

$$W_{NMO,12}^P = \frac{c_{36}[c_{44}(2 c_{55} + c_{13}) - c_{33}(c_{13} + c_{23} + c_{44} + c_{55})]}{(c_{33}-c_{44})(c_{33}-c_{55})}, (12)$$

$$W_{NMO,22}^P = \frac{(c_{33}-c_{55})(c_{23}^2 + 2 c_{23} c_{44} + c_{33} c_{44}) + c_{36}^2(c_{33}-c_{44})}{(c_{33}-c_{44})(c_{33}-c_{55})} (13)$$

En el límite de simetría ortorrómbica (donde las constantes c_{16} , c_{26} , y c_{36} son iguales a cero) los coeficientes $W_{NMO,ij}$ resultan idénticos a los coeficientes para el cuadrado de la veloci-

dad del NMO en los planos de simetría de un medio ortorrómbico $W_{NMO,XZ}$ y $W_{NMO,YZ}$ (8). De igual modo $W_{NMO,12}$ resulta igual a cero como debe esperarse en medios ortorrómbicos.

En segundo lugar, para el modo de propagación transversal SI se obtiene

$$W_{S1}(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = W_{S1,z} \cos^2 \theta_{1,i} + \sin^2 \theta_{1,i} S_{12} W_{NMO,S1} S_{21}^T (14)$$

donde $WSI,z = C55$ y los términos de la matriz $WNMO,S1$ vienen dados en función de las constantes elásticas por las expresiones

$$W_{NMO,11}^{S1} = c_{11} + \frac{(c_{13} + c_{55})^2}{(c_{33} - c_{55})}, \quad W_{NMO,12}^{S1} = c_{16} + \frac{c_{36}(c_{13} + c_{55})}{(c_{33} - c_{55})},$$

$$W_{NMO,22}^{S1} = c_{66} + \frac{c_{36}^2}{(c_{33} - c_{55})} \quad (15)$$

En el límite de simetría ortorrómbica donde las constantes $c16$, $c26$, y $c36$ son iguales a cero, los coeficientes $WSI NMO,ij$ resultan idénticos a los coefi-

cientes para el cuadrado de la velocidad del NMO de un medio ortorrómbico (8).

En tercer lugar para el caso de la onda transversal $S2$ se obtiene de manera idéntica la siguiente expresión

$$W_{S2}(\theta_{1,i}, \theta_{2,i}) = W_{S2,z} \cos^2 \theta_{1,i} + \sin^2 \theta_{1,i} S_{12} W_{NMO,S2} S_{21}^T. \quad (16)$$

$WS2,z = C44$ y los términos de la matriz $WNMO,S2$ se expresan en función de las constantes elásticas por las ecuaciones

$$W_{NMO,11}^{S2} = c_{66} + \frac{c_{36}^2}{(c_{33} - c_{44})}, \quad W_{NMO,12}^{S2} = c_{26} + \frac{c_{36}(c_{23} + c_{44})}{(c_{33} - c_{44})},$$

$$W_{NMO,22}^{S2} = c_{22} + \frac{(c_{23} + c_{44})^2}{(c_{33} - c_{44})} \quad (17)$$

Igualmente, en el límite cuando $c16$, $c26$, y $c36$ son iguales a cero, los coeficientes $WS2 NMO,ij$ resultan idénticos a los coeficientes para el cuadrado de la velocidad del NMO en un medio ortorrómbico (8)

Resultados y Discusión

La validación de la aproximación elipsoidal de las velocidades de fase en un medio monoclinico se realiza para la arenisca doblemente fracturada (10)

obtenida a partir de la matriz de un medio ortorrómbico para el cual se le añaden fracturas de acuerdo a la teoría de Muir-Schoenberg (11-12) con los siguientes valores para sus constantes elásticas.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 336.56 & 117.27 & 103.32 & 0 & 0 & 30.00 \\ 117.27 & 310.00 & 92.27 & 0 & 0 & 30.00 \\ 103.32 & 92.27 & 223.95 & 0 & 0 & 10.00 \\ 0 & 0 & 0 & 49.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54.00 & 0 \\ 30.00 & 30.00 & 10.00 & 0 & 0 & 96.36 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes elásticos C_{ij} vienen dados en $grs/(cms.seg^2)$. La densidad es de $2.42 \text{ grs}/cm^3$.

En general el frente de ondas longitudinales varía de forma suave y se puede observar en la Figura 2 (a) que el frente de ondas exacto (mallado) y el elíptico

(sólido) coinciden cerca al eje vertical de simetría. Igualmente sucede para los frentes de las ondas transversales o de cizalla $S1$ y $S2$ cerca al eje vertical. Sin embargo, al crecer el ángulo polar (elevación) se puede observar que la diferencia entre los frentes de onda exactos y aproximados aumenta de ma-

nera monótona. Esto significa que las velocidades horizontales y por tanto las velocidades de NMO no son completamente reproducidas por la aproximación elipsoidal a medida que la elevación aumenta.

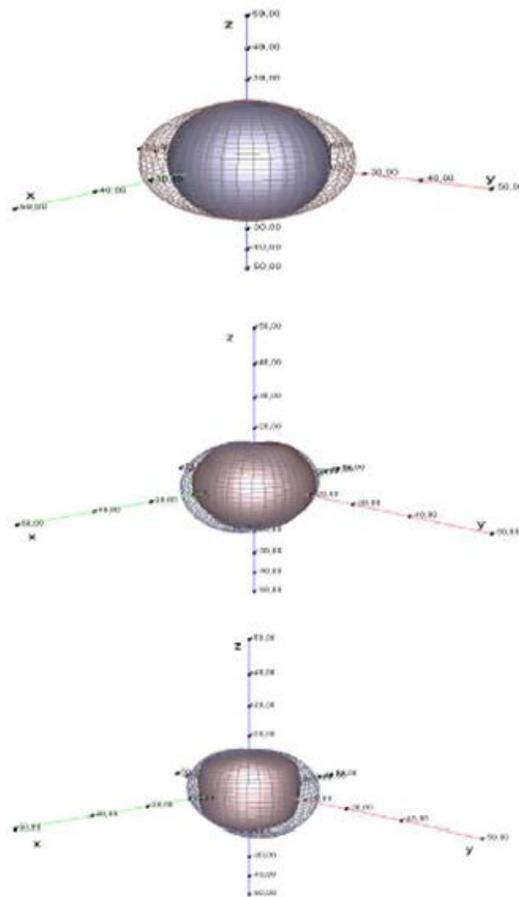


Figura 2. Frentes de onda exactos (mallado) y elipsoidales (sólido) para ondas tipo P (a) tipo S_1 (b) y ondas tipo S_2 (c) calculados con la ecuación de Christoffel y la aproximación elipsoidal respectivamente.

Conclusiones

En particular se muestra que los frentes de ondas elásticas son elipsoides cerca del eje vertical de simetría en medios doblemente fracturados. Esto implica que las ideas introducidas en (4,7,8) son válidas también para medios monoclinicos con un plano de simetría horizontal. Se concluye que la aproximación elipsoidal de las velocidades de fase y del NMO es una buena aproximación para ángulos polares menores a veinte grados con respecto al eje vertical de simetría en el tipo de medios fracturados que modela la simetría monoclinica. También se muestra de las ecuaciones [11-13] que la velocidad del NMO para ondas P es controlada por la constante elástica $C36$ fuera del plano horizontal de simetría. De las ecuaciones [15] y [17] se deduce que en el comportamiento monoclinico de las velocidades del NMO de cizalla es controlado por las constantes $C16$ y $C26$.

Agradecimientos

Uno de los autores P. Contreras, agradece discusiones útiles con el Dr. V. Grechka. Se agradece el financiamiento por parte del proyecto CDCHTA C-1908-14-05-B.

Referencias Bibliográficas

V. Grechka, P. Contreras & I. Tsvankin, 2000. Inversion of normal move-out for monoclinic media. *Geophysical Prospecting* 48: 577-602.

M. J. Musgrave, 1970. *Crystal Acoustics*. Holden Day. K. Helbig. 1994. *Foundations of anisotropy for exploration seismic*. Pergamon Press.

S. Byum 1982. Seismic parameters for media with elliptical velocities dependencies. *Geophysics* 47: 1621-1626.

F. Muir 1990. Various equations for TI media. *SEP Stanford* 70: 367-372.

L. Thomsen 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics* 51: 1954-1966.

R. Michelena 1994. Elastic constants of transversely isotropic media from constrained aperture traveltimes. *Geophysics* 59: 658-667.

P. Contreras, H. Klie & R. Michelena 1998. Inversion of elastic constants from ellipsoidal velocities in orthorhombic media. Expanded abstracts 68th annual meeting of the Society of Exploration Geophysicists: 1491-1494.

I. Bronshtein & K. Semendiaev 1988. *Manual de Matemáticas*. Editorial Mir.

J. Dellinger 1991. Anisotropic seismic-wave propagation Ph.D. Thesis Stanford University. M. Schoenberg & F. Muir 1989. A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics* 54: 581-589.

M. Schoenberg & K. Helbig 1995. Modeling elastic behavior in a vertical fracture earth. 53rd annual meeting of the European Society of Exploration Geophysicists: 288-289.