

---

# CONTROL ÓPTIMO PARA LA ESTABILIZACIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO ROTATIVO

De Pool<sup>1</sup> Sergio, Cañizalez<sup>2</sup> José, Flores<sup>3</sup> Fredniel

<sup>1</sup>Universidad Rafael Urdaneta

<sup>2</sup>Universidad Rafael Bellosó Chacín

<sup>3</sup>Petróleos de Venezuela

sergiodepool@gmail.com

## Resumen

Los péndulos invertidos son dispositivos populares para el análisis de sistemas no lineales, ya que constituye un problema clásico en la ingeniería de control moderna, debido a que sus características son comunes a otros procesos como las aplicaciones a nivel de aeronáutica, mecatrónica, procesos químicos, entre otros. Estos dispositivos por ser altamente complejos y de aplicaciones muy específicas, los convierten desde una perspectiva económica en equipos altamente costosos, en la actualidad las empresas que los fabrican con fines educativos son todas extranjeras. En consecuencia, esta investigación logró la construcción e integración de un péndulo invertido rotacional, desarrollando así un equipo capaz de ser utilizado en el campo de la investigación científica como en la educación de la ingeniería de control, siendo así un producto con un noventa y tres (93) por ciento de capital venezolano, lo cual permitirá su producción y distribución a universidades, institutos tecnológicos, centros de investigación, y de esta manera lograr accesibilidad, en la mejora en la calidad de la enseñanza de este campo tan importante para el progreso tecnológico del país.

**Palabras clave:** construcción, péndulo invertido, ingeniería de control, sistema no lineal.

## Introducción

El primer péndulo invertido fue diseñado en los años sesenta y es el más estudiado en sistema de control, el péndulo invertido sobre un carro que consiste en una varilla circular que gira libremente en sus extremos mediante una articulación situada sobre el carro que se mueve en una línea rectilínea horizontal bajo una fuerza con un sensor angular para el motor y varilla circular.

Así mismo, cuarenta años después, aún permanece como un objeto de estudio dentro de las investigaciones actuales, debido a que su modelo matemático presenta analogías con procesos reales y tiene múltiples aplicaciones dentro de la ciencia y en la ingeniería desde el movimiento aéreo dinámico del cuerpo, el transporte de personas como los Serways, el lanzamiento de misiles, la estabilización de grúas y edificios.

Además, otra aplicación dentro del campo de la robótica es en posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra todas estas aplicaciones tienen una estrecha analogías con el sistema del péndulo invertido rotativo y la ingeniería de control debido a que a la hora de su diseño e implementación requieren del análisis de sistemas pendulares y requieren de sistema de control por realimentación para su óptimo funcionamiento.

Con base a lo anteriormente expuesto, el péndulo horizontal tenía una gran limitante a la hora de estabilizarlo debido a que su recorrido en su eje (X) sobre el carro está acotado, por lo que cuando alcanza unos de los extremos del soporte horizontal, el sistema deja de funcionar, es decir, cae la varilla circular y esto produce otra complicación al sistema

no lineal del péndulo en funcionamiento real.

Así mismo, para evitar estas limitaciones Katsuhisa Furuta en el Instituto de Tokio, propuso un péndulo invertido rotativo o denominado péndulo de Furuta, es un mecanismo físico que consta de una barra vertical circular llamada péndulo, una barra horizontal que se denominará brazo, un actuador (dc), y un sistema de control, que incluye un sistema sensórico los cuales son un sensor angular para el brazo y otro sensor angular del péndulo. Ahora bien, las intenciones principales de la presente investigación es llevar la varilla (Péndulo) desde el punto de referencia hasta su posición invertida y mantenerla en dicha posición, el encargado de regular la varilla estabilizada es el sistema de control óptimo LQR retando así a la gravedad, debido a eso es un problema de control complejo, la cual la ingeniería de control puede resolver con análisis y estudio profundo sobre el sistema.

## Desarrollo del Modelo Matemático del Péndulo Invertido Rotativo

El modelo del péndulo invertido rotativo está definido por el método de Lagrange muy útil para este tipo de sistemas ya que basta con determinar la energía del sistema y aplicar unas cuantas derivadas. Las ecuaciones de Euler Lagrange proporcionan dos ecuaciones diferenciales no lineales que se transforman posteriormente en ecuaciones de estado en forma matricial. Se presenta el siguiente diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido rotativo, donde la nomenclatura del sistema están relacionadas con varias variables como: Inercia del brazo,

ángulo del brazo, longitud del brazo, masa del péndulo, longitud del péndulo, inercia del péndulo, ángulo del péndulo, torque aplicado al brazo y las ecuaciones

que se utilizaron fueron Euler LaGrange, Segunda Ley de Newton y para el cálculo de inercia Steiner (Figura 1).

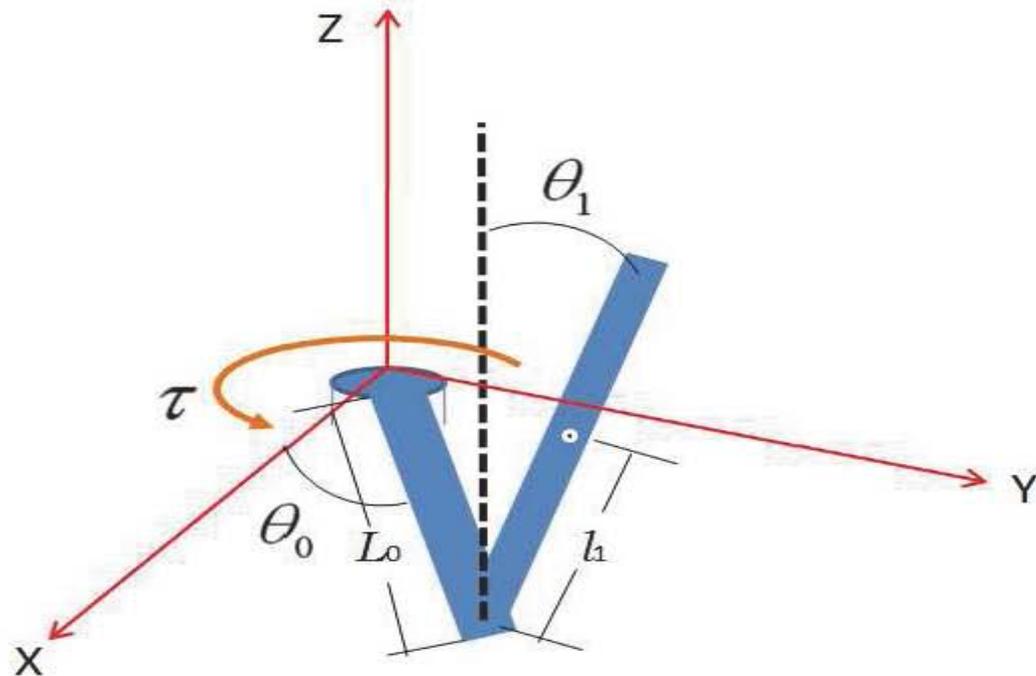


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido rotativo

**donde:**

$J_0$  = Inercia rotacional de la barra 1.

$L_0$  = Longitud total de la barra 1.

$\theta_0$  = Ángulo de rotación de la barra 1.

$m_1$  = Masa del péndulo.

$l_1$  = Distancia al centro de gravedad del péndulo.

$J_1$  = Inercia rotacional del péndulo.

$\theta_1$  = Ángulo de rotación del péndulo.

$\tau$  = Torque aplicado a la barra 1.

$q_0$  = representa el ángulo del brazo.

$q_1$  = representa el ángulo del péndulo.

Ahora las ecuaciones dinámicas de Euler-Lagrange se definen por:

$$L = K_T - K_P \quad \text{Las ecuaciones del Lagrangiano} \quad \text{Ecuación (1)}$$

$$K_T = K_B + K_P \quad \text{Energía Cinética} \quad \text{Ecuación (2)}$$

$P_T = P_B + P_P$  Energía Potencial

Ecuación (3)

Después de múltiples derivadas y técnicas matemáticas se representa la energía cinética del y potencial del sistema.

Energía Cinética

$$K_T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0^2 \text{sen}^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

Ecuación (4)

Energía Potencial

$$P_T = 0 + m_1 g l_1 (\cos q_1 - 1) \\ = m_1 g l_1 (\cos q_1 - 1)$$

Ecuación (5)

De la diferencia de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene:

$$L = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 L_0^2 \dot{\theta}_0^2 + m_1 L_0 l_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_0^2 \text{sen}^2 \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g l_1 (\cos \theta_1 - 1)$$

Ecuación (6)

Por lo tanto, se representa las matrices del sistema ya linealizado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[ \frac{-m_1 L_0 l_1}{\det(M_{lin})} \right] m_1 l_1 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \left[ \frac{J_1 + m_1 l_1^2}{\det(M_{lin})} \right] m_1 l_1 g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

Ecuación (7)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \left[ \frac{J_1 + m_1 l_1^2}{DET(M_{lin})} \right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left[ \frac{-m_1 L_0 l_1}{DET(M_{lin})} \right] \end{bmatrix} \tau_1$$

Ecuación (8)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Ecuación (9)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D=$$

Ecuación (10)

En las ecuaciones anteriormente se muestra la matriz de estado, la matriz de control, la matriz de salida y la de transición directa.

#### Diseño del Control Óptimo (L.G.R)

Para el diseño del controlador se tomaron las ecuaciones de estados que con las matrices (A, B, C, D), donde A es la matriz de estado, B es la matriz de control, C es la matriz de salida, D es la matriz de transición directa en tiempo continuo, se determinó el valor de Q a través de la ecuación (11), luego se obtuvo el valor de R después de múltiples intentos variando el valor a nivel computacional.

Ahora, se muestra los valores reales de las matrices (A, B, C, D) desarrolladas en el modelo matemático con los datos reales del sistema del péndulo invertido rotativo, igualmente se presenta los valores de Q, el cual se determinó por la ecuación (11) y el valor de R que se utilizó luego de múltiples pruebas hasta llegar a la estabilización del sistema de la varilla del péndulo y el

brazo del mismo.

$$Q=C^* * C \quad \text{Ecuación (11)}$$

$$R=80000$$

Así mismo, se diseñó el controlador para calcular los Valores de K1, K2, K3, K4 en tiempo continuo, donde se mostrara solamente la salida del la varilla del péndulo y la salida del brazo del sistema no lineal del péndulo invertido rotativo, debido a que se ubican en la matriz de salida (C) en la manera mostrado anteriormente

$$[K, S, E] = \text{lqr} (A, B, Q, R)$$

Ecuación (12)

K = (Valores del Controlador en Tiempo Continuo)

$$K= -0.0035 \quad -0.0322 \quad -14.4649 \quad -4.9397$$

Finalmente, después del estudio de la dinámica del sistema resulto importante usar un tiempo de muestreo de  $T_s=0.005$  seg, para que el control en tiempo discreto pudiera funcionar a la hora de que se realizaron las simulaciones del

sistema. A continuación se representa el diseño del controlador óptimo (LQR) discretizado para obtener los valores de (K1, k2, K3, K4), las cuales son los valores del controlador.

Tiempo de muestreo ( $T_s=0.005$ )

$$[A, B] = \text{c2d} (A, B, T_s)$$

Ecuación (13)

$$[K, S, E] = \text{dlqr} (A_d, B_d, Q, R)$$

Ecuación (14)

$K = (K = (\text{Valores del Controlador en Tiempo Discreto}))$

$K = -0.0035 \quad -0.0317 \quad -14.5544 \quad -4.9696$

### Validación del Sistema del Péndulo Invertido Rotativo

La validación del sistema del péndulo invertido rotativo se muestra en la observación directa de las respuestas a lazo abierto, donde gráficamente se representa el comportamiento de las señales del ángulo del brazo y el ángulo del péndulo, el cual se determinó que el sistema no lineal del péndulo no se puede controlar a lazo abierto por que la respuesta del ángulo del péndulo y las respuesta ángulo del brazo del sistema tiende a infinito (Figura 2).

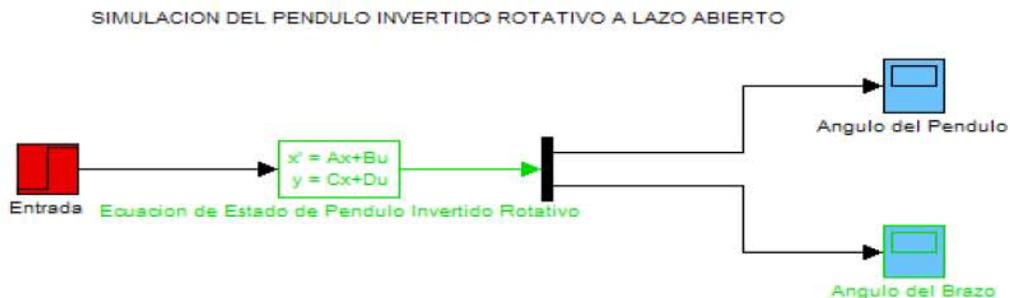


Figura 2. Diagrama de Sistema del Péndulo a Lazo Abierto

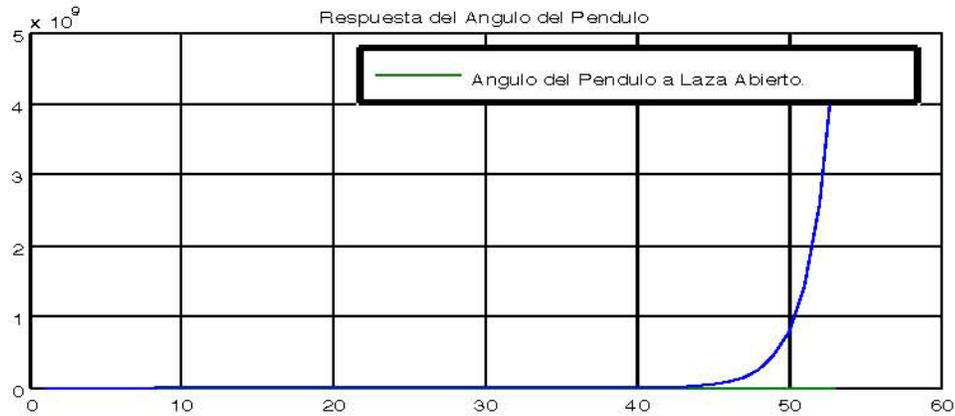


Figura 3. Respuesta del Ángulo del Péndulo

Cabe destacar que el sistema del péndulo es un modelo matemático de cuarto orden, eso produce que el sistema sea inestable de naturaleza, es decir, que el péndulo a lazo abierto la respuesta del ángulo del péndulo siempre va a tender a infinito como

se ilustra en la Figura 3, esta respuesta se debe a la dinámica del proceso, se muestra que a (1.2 segundos) en el eje de

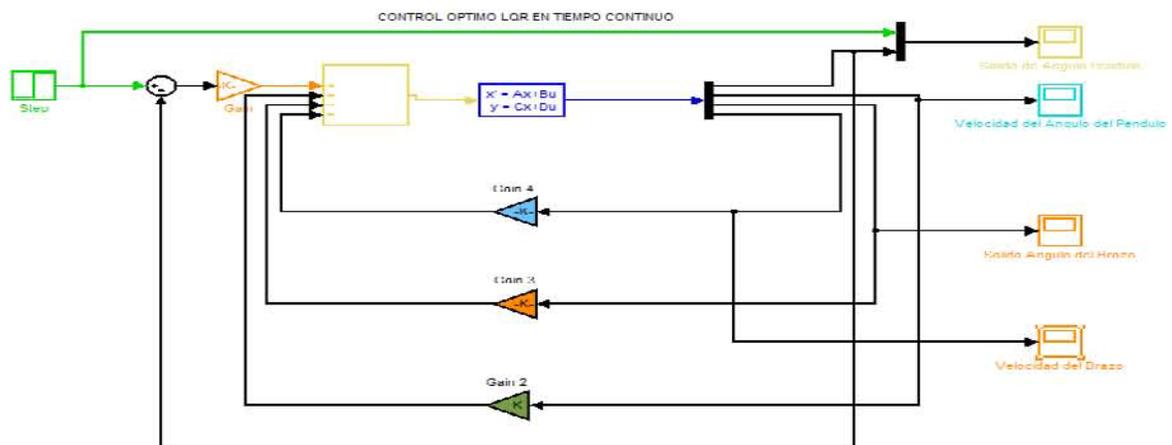
la abscisas (eje x) comienza la señal del ángulo a tender a infinito.



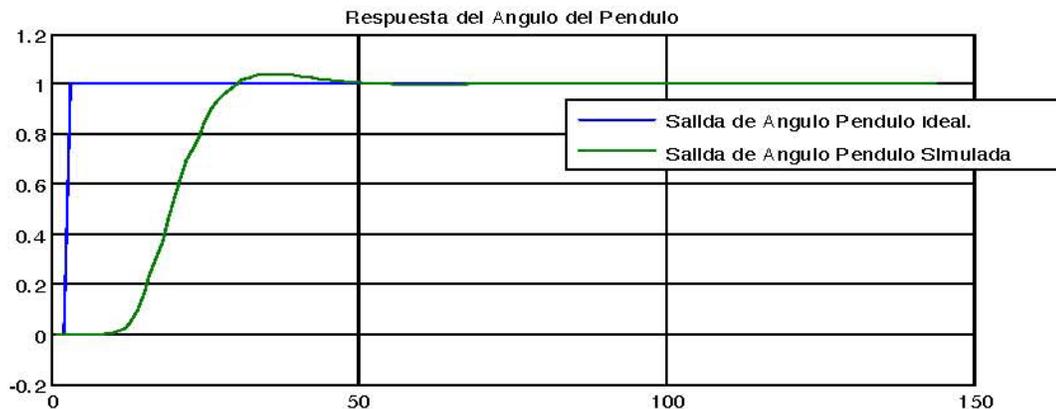
**Figura 4.** Respuesta del ángulo del péndulo

Así mismo, la señal del ángulo del péndulo (Figura 4), en la cual se observa el mismo comportamiento que ahora la señal de ángulo del brazo también tiende a infinito por la naturaleza de la dinámica del sistema no lineal del

péndulo invertido rotativo, por el orden mencionado no permite un control a lazo abierto, como se muestra es inestable en la señal amarilla se puede apreciar su tendencia (Figura 5).



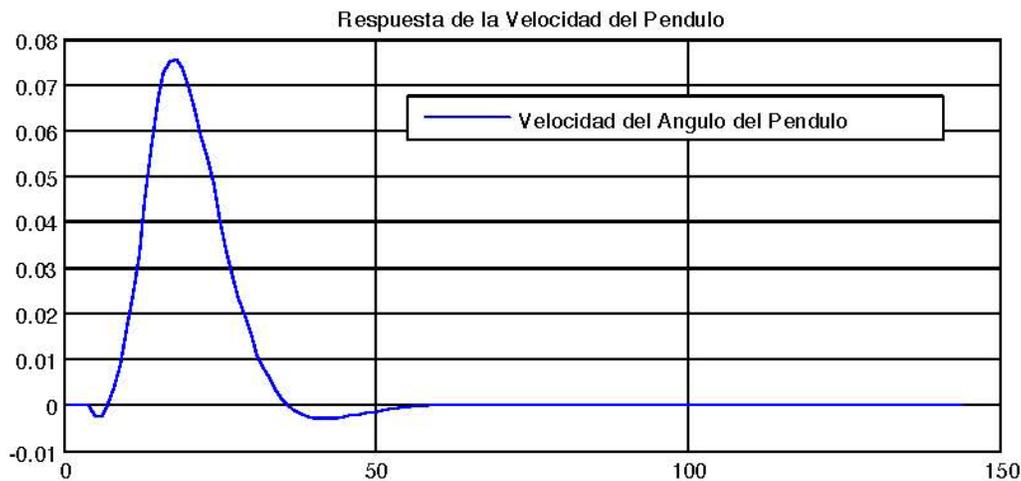
**Figura 5.** Diagrama de control óptimo (LQR) en tiempo continuo. Respuesta del ángulo del péndulo



**Figura 6.** Salida ideal del péndulo vs. Salida simulada del péndulo

Se muestra el comportamiento del control óptimo (LQR) como regula muy bien con respecto a la señal ideal des

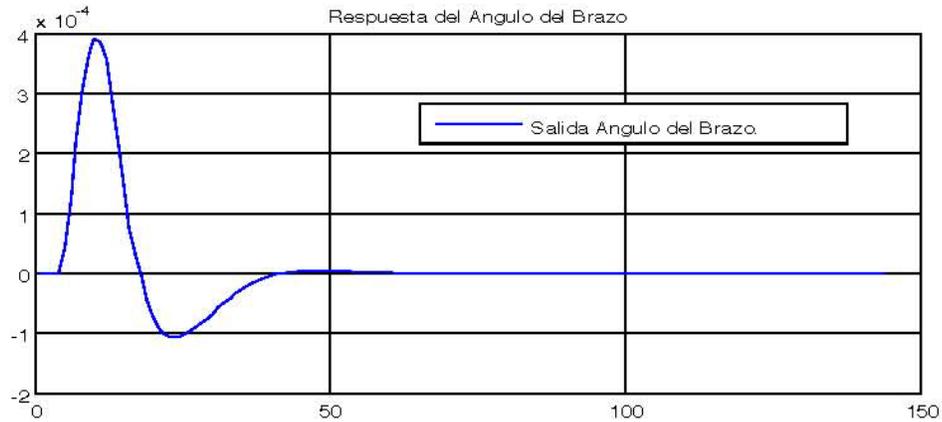
sistema se estabiliza con un rango de 25 segundos (Figura 6).



**Figura 7.** Respuesta de la velocidad del péndulo

Siguiendo con el orden de ideas, la señal de salida de la velocidad del péndulo (Figura 7) produce una oscilación desde 0 hasta 0.075 y después estabiliza, esto se produce cuando la señal del ángulo del péndulo oscila hasta llegar a su

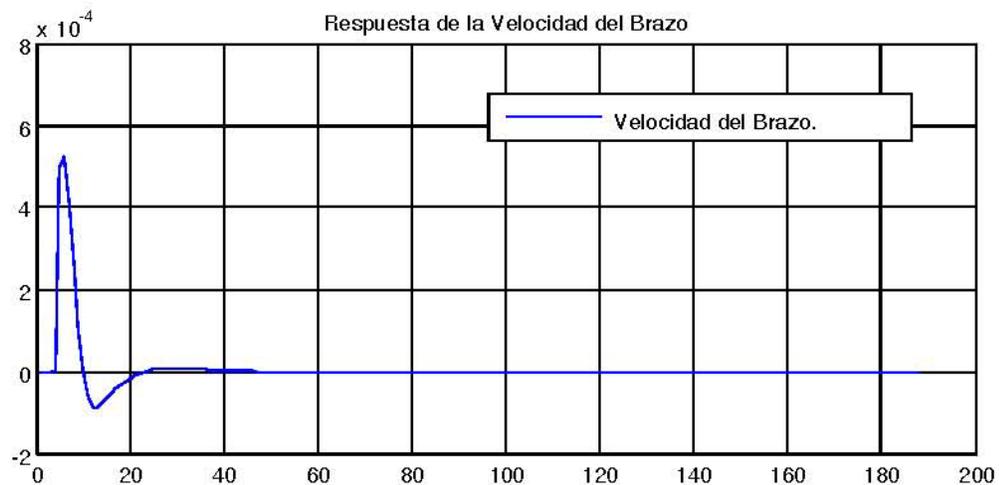
estabilización en su posición invertida, la representación de las salidas del ángulo del péndulo y la velocidad dependen directamente del ángulo y velocidad del brazo.



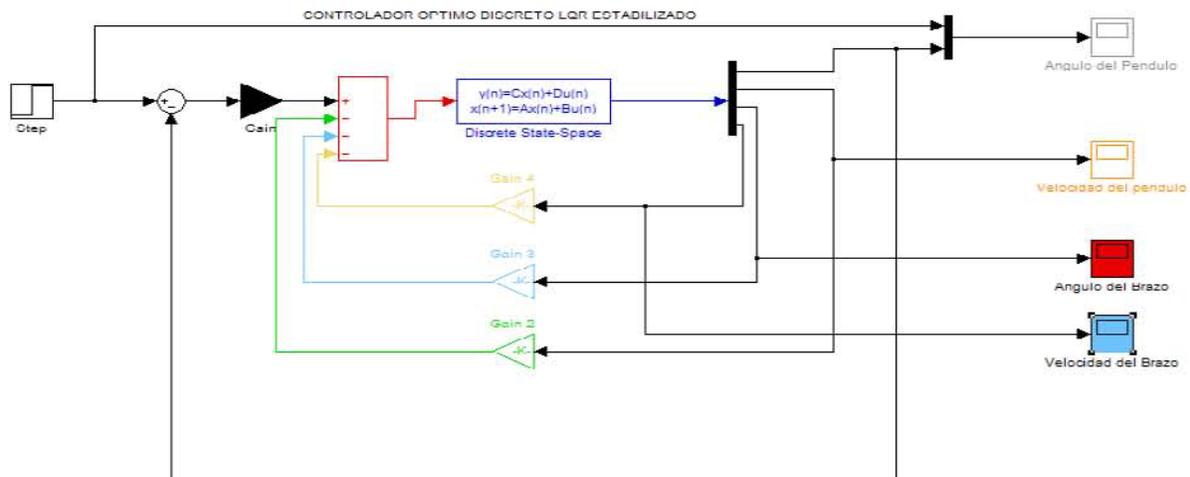
**Figura 8.** Respuesta del ángulo del brazo

Se representa en la Figura 8 la respuesta del ángulo del brazo del sistema, es decir, hablando en términos de energía se le entrega toda la energía en una dirección y luego se resta en otra dirección para llevar la varilla del péndulo a la posición invertida y después el control óptimo empieza a regular oscilando

hacia ambos direcciones hasta lograr la estabilización en la posición invertida. La Figura 9 muestra la Respuesta de la velocidad del brazo mientras que en la Figura 10 se observa Diagrama del control óptimo (LQR) en tiempo discreto.

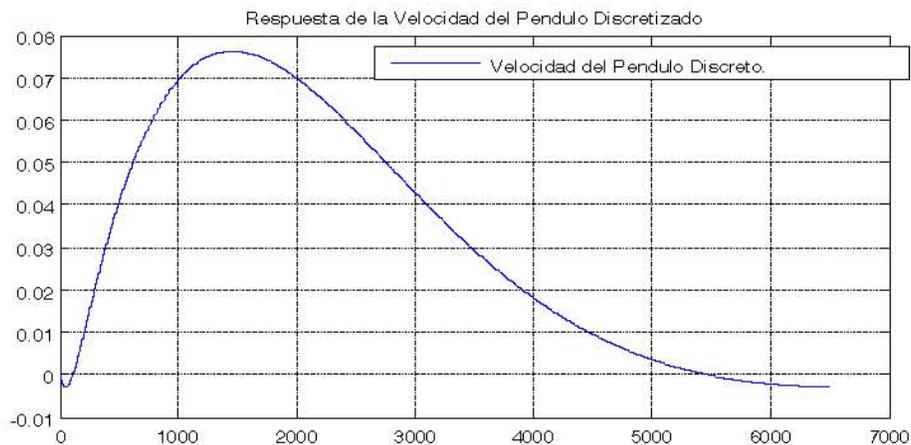
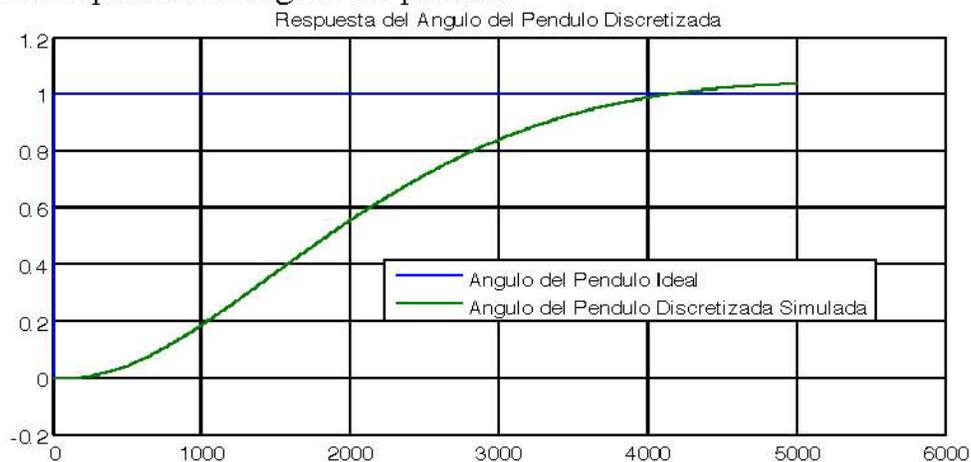


**Figura 9.** Respuesta de la velocidad del brazo



**Figura 10.** Diagrama del control óptimo (LQR) en tiempo discreto. Las Figuras 11 y 12 muestran la Respuesta de la velocidad del péndulo, Respuesta del ángulo del péndulo y la respectivamente.

**Figura 11.** Respuesta del ángulo del péndulo

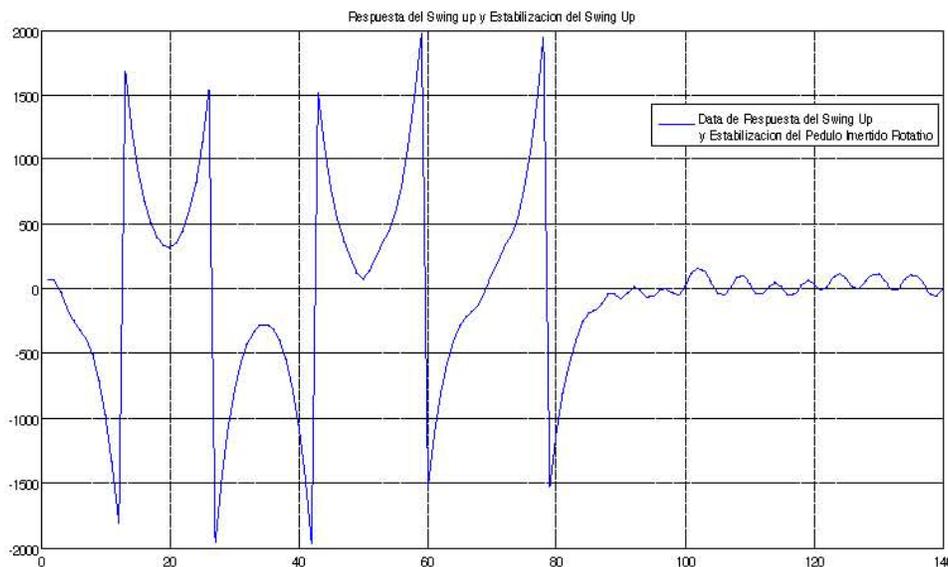


**Figura 12.** Respuesta de la velocidad del péndulo

Finalmente, se observó que al discretizar las matrices de estado continuo a discreto el tiempo de muestreo afecta directamente a la estabilidad del sistema del péndulo invertido rotativo, debido a que se produce una estabilidad de las salidas, lleva un poco más de tiempo que esto suceda; sin embargo es obligatorio discretizar el sistema para que se pueda

producir la implantación en la tarjeta Dspic por ser un dispositivo electrónico y trabaja con la lógica de cero y uno.

Se puede observar en tiempo real como es el funcionamiento del péndulo con los dos fenómenos que suceden hasta llegar al punto de estabilización a los 90° grados (Figura 13).



**Figura 13.** Respuesta del swing up y tiempo de estabilización en tiempo real

## Conclusiones

Se diseñó la estructura del péndulo invertido rotativo con láminas de hierro apropiadas para soportar la ejecución del péndulo en funcionamiento.

A partir de las simulaciones realizadas al modelo matemático de los movimientos que interactúan en el péndulo invertido rotativo se demuestra que el comportamiento del proceso investigado es inestable por naturaleza.

Se implantó el control digital (LQR) con ayuda de una tarjeta de desarrollo Dspic que es la interface hardware/software entre el computador y el péndulo, el

cual permite la medición, lectura de los encoder y el control en tiempo real del péndulo invertido rotativo.

El desarrollo de esta investigación permite aplicar este tipo de control óptimo a sistemas industriales tanto SIMO como MIMO, los cuales tienen dinámicas rápidas, ya que responde robustamente a cualquier perturbación del sistema o perturbación producida por un elemento externo.

## Referencias Bibliográficas

Caipa, J. (2010). Diseño e Implementación de una Plataforma

Pedagógica Para el Desarrollo de Estrategias de Control: El Péndulo de Furuta en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Chye, T.; Sang, T. (1999). Rotary Inverted Pendulum.

Kuo, B. (1996) Sistema de Control Automático. 7a edición. Prentice-Hall. Hispanoamericana, S.A.

Xue, D.; Chen, Y.; Atherton, D. (2007). Linear feedback control, analysis and design with Matlab.